数理解析研究所講究録
413巻 1981年 144-152

Wild horseshoe and topological entropy

東海大 情報数理 郡山 彬
東工大 情報科学 永瀬輝男

§0. 序

この報告で、Wild horseshoe を定義し、それの topological entropy を計算する。さらに、1つの応用として、compact mfd. 上の expansive homeo. の class の性質を調べる。

Mを compact m-mfd. とし、$Hom(M)$ を M上の homeo. 全体の作る metric space とする。metric は、

$$d(f, g) = \sup\{d(f(x), g(x))\ ;\ x \in M\}。$$

$E(M)$, $E^{h}(M)$, $E^{ah}(M)$によって、それぞれ、expansive homeo. 全体，entropy-expansive homeo. 全体，asymptotically entropy-expansive homeo. 全体の集合とする。この時次の結果を得る。

定理. wild horseshoe は asymptotically entropy-expansive ではない。従って、expansive ではない。

系. Mを compact m-mfd $(m>1,\ m\neq 4)$ とする。$E^{h}(M)$ も $E^{ah}(M)$ も $Hom(M)$で interior point を持たない。

注意. 系に述べた結果は、[YN]の結果からも示せる。

§1. 定義と記法.

エルゴード理論の基本的定理に関しては、[DGS]を参照。また、PL-Topology に関しては、[HD]を参照。

$X=(X,d)$を compact metric space, $f:X\to X$ を homeo. とする。

EおよびSをXの subset とする。nを正整数, $\delta>0$とする。

SがEを(n,δ)-span するとは、各$y\in E$に対して、$x\in S$ が存在し、$d(f^k(x),f^k(y))\leqq\delta$ for all $0\leqq k<n$

を満すことである。$r_n(E,\delta)=r_n(E,\delta,f)$を、Eを$(n,\delta)$-spanする集合の cardinality の最小値とする。compact set K に対して、

$$\bar{r}_f(K,\delta)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log r_n(K,\delta),$$

$$h(f,K)=\lim_{\delta\to 0}\bar{r}_f(K,\delta)$$

とおく。Xが compact であるので $h_{top}(f)=h(f,X)$である。

ここに、$h_{top}(f)$は、fの topological entropy を表わす。

各$x\in X$および$\varepsilon>0$に対して、

$$\Gamma_\varepsilon(x)=\bigcap_{n\in\mathbb{Z}}f^{-n}B_\varepsilon(f^n(x))=\{y\in X\,;\,d(f^n(x),f^n(y))\leqq\varepsilon,\ n\in\mathbb{Z}\}$$

$$h_f^*(\varepsilon)=\sup\{h(f,\Gamma_\varepsilon(x))\,;\,x\in X\}$$

とおく。ここに$B_\varepsilon(\cdots)$はε-近傍を表わす。

fは、$h_f^*(\varepsilon)=0$ for some $\varepsilon>0$ のとき、entropy-expansive, $\lim_{\varepsilon\to 0}h_f^*(\varepsilon)=0$ のとき、asymptotically entropy-expansive と呼ばれる。

§2. Wild horseshoe

2.1. 定義. $B=[-2,2]\times[-2,2]\subset\mathbb{R}^2$, $W_k=[-1,1]\times\{\frac{k}{n}\}$ $k=0,1,\cdots,n$ とする。 $\eta_n: B\to B$ を、次の様な homeo. とする。 (1) $\eta_n|_{\partial B}=id.$

(2) 各 $k=0,1,\cdots,n$ に対して、

$$\begin{cases}\eta_n(W_k)\subset[-1,1]\times[-2,-1] & \text{if } k \text{ is even},\\ \eta_n(W_k)\subset[-1,1]\times[1,2] & \text{if } k \text{ is odd}.\end{cases}$$

η_n を type n の horseshoe と呼ぶ([SS]参照)

2.2. 補題. C を 2-cell, $g: B\to C$ を homeo. とすると、 $h_{top}(g\circ\eta_n\circ g^{-1})\geqq\log n$ である。

証明. [YN] 参照

2.3. 定義. $B_n=[\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n}]\times[-\frac{1}{2n},\frac{1}{2n}]$ とし、$\xi_n: B\to B$ を次の様な affine map とする。

$\xi_n(-2,2)=(\frac{1}{2n+1},\frac{1}{2n})$, $\xi_n(2,2)=(\frac{1}{2n},\frac{1}{2n})$

この時. $\{B_n; n=1,2,\cdots\}$ は. B内の. 互に交わらない 2-cell の集合となる。 $\phi_0: B\to B$ を次の様な homeo. とする。

(1) $\phi_0|_{B_n}=\xi_n\circ\eta_n\circ\xi_n^{-1}$, (2) $\phi_0|_{(B-\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)}=id.$

この map ϕ_0 を. B上の wild horseshoe と呼ぶ。

2.4. 補題. $\theta: B\to B$ を $\theta(x,y)=(x,-y)$ で定義される reflection とする。 $h_{top}(\theta\circ\phi_0)\geqq\log n$, かつ. $h_{top}(\phi_0\circ\theta)\geqq\log n$ となる。

証明. $h_{top}(\eta_n\circ\theta)\geqq\log n$, $h_{top}(\theta\circ\eta_n)\geqq\log n$ は易しい。一方、B_n は、θ-invariant かつ、ϕ_0-invariant だから、

$$h_{top}(\theta\circ\phi_0)\geqq h_{top}(\theta\circ\phi_0|_{B_n})=h_{top}(\theta\circ\eta_n)\geqq\log n.$$

もう一方の式も同様に証明できる。

2.5. 系. 各自然数 k に対して、$C_k=[-1/2k,1/2k]\times[-1/2k,1/2k]$ とおくと、$h_{top}(\phi_0|_{C_k})=\infty$.

証明. 各 $n\geqq k$ に対して、$C_k\supset B_n$ より、

$$h_{top}(\phi_0|_{C_k})=h_{top}(\theta\circ\phi_0|_{C_k})=h_{top}(\phi_0\circ\theta|_{C_k})=\infty.$$

$S(B)$をBの suspension、即ち、$S(B)=B\times[-1,1]/\{B\times(-1),B\times1\}$ とする。Bと$B\times0\subset S(B)$ は自然に同相となるので、Bを$S(B)$の subspace と考えることにする。各nに対して、$S^n(B)$を$S^{n-1}(B)$の suspension とする。$B\subset S(B)\subset\cdots\subset S^n(B)\subset\cdots$ である。

2.6. 定義. $\phi_1=S(\phi_0):S(B)\to S(B)$ をϕ_0の suspension とする。以下帰納的に、$\phi_n:S^n(B)\to S^n(B)$ を

$\phi_n=S(\phi_{n-1}):S(S^{n-1}(B))\longrightarrow S(S^{n-1}(B))$ で定義する。

map ϕ_n を $S^n(B)$ 上の wild horseshoe と呼ぶ。

2.7. 定理. ϕ_nは、asymptoticall entropy-expansive ではない。

証明. 0を原点とする。任意の $\varepsilon>0$ および $1/2k<\varepsilon$ なる

自然数kをとる。 Bは$S^n(B)$の subspaceであることに注意する。 C_kは$B_\varepsilon(0)$に含まれ、かつ、ϕ_n-invariant であるから、 $\Gamma_\varepsilon(0) \supset C_k$ となる。従って、

$h(\phi_n, \Gamma_\varepsilon(0)) \geq h(\phi_n, C_k) = h_{top}(\phi_n|C_k) = h_{top}(\phi_0|C_k) = \infty.$

故に、$h^*_{\phi_n}(\varepsilon) = \infty$。 よって、$\lim_{\varepsilon \to 0} h^*_{\phi_n}(\varepsilon) = \infty.$

§3. 系の証明.

First step. $f: M \to M$を任意の asymptotically entropy-expansive homeo. とする。Mは compact だから、次の様な homeo. $f_1: M \to M$が存在する。 (1). f_1は周期kの周期点x_0を持つ。 (2). $d(f_1, f) < \varepsilon/3$ である。

Second step. 次にf_1を、f_3^k-invariant な 2-cell Dを持つ homeo. f_3で近似する。そのために、3つの場合に分ける。

Case 1. $m \geq 6$ の場合. 各$i = 1, 2, \cdots, k-1$ に対して、$x_i = f_1^i(x_0)$とする。次の様な$\delta > 0$がとれる。

(1) $\delta < \varepsilon/3$, かつ (2). $\{f_1^i(B_\delta(x_0)); i = 0, 1, \cdots, k-1\}$は互に交わらない m-cell の集合となる。

さて、m-cell $B_\delta(x_0)$の interior をN^mとする。実数$\gamma < \delta$が存在し、$f_1^k(B_\gamma(x_0)) \subset N^m$となる。ここで、$B_\gamma(x_0)$の interior を m-dim. Euclidean space と考える。 $\zeta = f_1^k|_{Int(B_\gamma(x_0))}$ とおく。Δを 2-simplex, $\Phi: \Delta \to Int(B_\gamma(x_0))$ を$x_0 \in Int(\Delta)$なる linear embedding とする。

$\alpha = \frac{1}{2} \cdot d(\zeta \circ \Phi(\Delta), N - \zeta(\mathrm{Int}(B_\gamma(x_0))))$ とおく.

Homma の定理（[HM] 又は [RS] 参照）より、次の様な、N^m の isotopy $\{h_t\}$ が存在する.

$$\begin{cases} (1) & h_t|_{(N^m - f_1^k(B_\gamma(x_0)))} = id \quad \text{かつ} \\ (2) & h_1 \circ f_1^k \circ \Phi \quad \text{は piecewise linear.} \end{cases}$$

$f_2 : M \to M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{k-1}(B_\gamma(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

明らかに、f_2 は homeo. また、$\Phi(\Delta)$, $f_2^k \circ \Phi(\Delta)$ は、PL mfd N^m 内の polyhedra である。従って、次の様な、M の ambient isotopy $\{j_t\}$ が存在する。

(1). $j_t|_{(M-N^m)} = id$, かつ　(2) $j_1 \circ f_2^k|_{\Phi(\Delta)} = id$.

そこで、$f_3 = j_1 \circ f_2$ とおく。$f_3 : M \to M$ は homeo. で、$f_3^k|_{\Phi(\Delta)} = id$. を満す。

Case 2. $m = 3$ or 5 の場合.　d, N, γ を Case 1 と同様にとる。$m = 3$ or 5 では Annulus conjecture が成立するから、次の様な、N^m の ambient isotopy $\{h_t\}$ が存在する。

(1) $h_t|_{\partial N} = id$, かつ (2) $h_1 \circ f_1^k(B_\gamma(x_0)) = B_\gamma(x_0)$.

そこで $f_2 : M \to M$ を次の様に定義する.

$$f_2(x) = \begin{cases} h_1 \circ f_1(x) & \text{if } x \in f_1^{k-1}(B_\delta(x_0)) \\ f_1(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

E^mを m-simplex とし、その重心を v_0 とする。$\Phi : E^m \to B_\delta(x_0)$ を、$\Phi(v_0) = x_0$ なる homeo. とする。S^1を ∂E^m 上の polygonal simple closed curve とし、Δを、S^1と v_0 の join とする。$\Phi^{-1} \circ f_2 \circ \Phi|_{\partial\Delta} : \partial\Delta \to \partial E^m$ は、inclusion map $\partial\Delta \hookrightarrow \partial E^m$ と ambient isotopic であるから、この ∂E^mの ambient isotopyを canonical に E^m へ拡張することにより次の様な、Mの ambient isotopy $\{\mathfrak{f}_t\}$を得る。

(1) $\mathfrak{f}_t|_{(M - B_\delta(x_0))} = id$，かつ　(2) $\mathfrak{f}_1 \circ f_2^k|_{\Phi(\Delta)} = id$.

そこで、$f_3 = \mathfrak{f}_1 \circ f_2$ とおく。$f_3 : M \to M$ は homeo. で、$f_3^k|_{\Phi(\Delta)} = id$ を満す。

Case 3.　$m = 2$ の場合。この場合も Annulus Conj. が成立する。従って、f^kが orientation preserving なら、Case 2 と同じ。f^kが orientation reversing の場合、f_2を次のf_3で近似する。

(1) $f_3^k(\Phi(\Delta)) = \Phi(\Delta)$，かつ

(2) $\exists$ homeo. $\xi : \Phi(\Delta) \to B$ s.t. $\xi \circ f_3^k \circ \xi^{-1} = \theta$

実際、2-cell 上の2つの orientation reversing homeo. は ambient isotopic であるから、この事は可能である。

以上3つの場合をまとめると、fは次の様なf_3で近似できる。

(1) $d(f, f_3) < 2\varepsilon/3$，

(2) $\exists$ flat embedding $\Psi : \Delta \to B_\delta(x_0)$, Δは 2-simplex.

(3) $\exists$ homeo. $\xi : \Psi(\Delta) \to B$ s.t.

$$\xi \cdot f_3^k \circ \xi^{-1} = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ and } f^k \text{ が orien. rever.} \\ id & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Third step. $\Psi(\Delta)$ は flat 2-cell だから、次の様な embedding $\Phi : S^{m-2}(B) \to B_\delta(x_0)$ が存在する。

(1) $\Phi(B) = \Psi(\Delta)$, かつ

(2)
$$\Phi^{-1} \circ f_3^k \circ \Phi|_B = \begin{cases} \theta & \text{if } m=2 \text{ かつ } f^k \text{ は orien. rever.} \\ id & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$f_4 : M \to M$ を次の様に定義する.

$$f_4(x) = \begin{cases} \Phi \circ \phi_n \circ \Phi^{-1} \circ f_3^k(x) & \text{if } x \in f_3^{-1} \circ \Phi(S^{m-2}(B)) \\ f_3(x) & \text{otherwise} \end{cases}$$

明らかに、 $f_4 \notin E^{ak}(M)$ である。

Reference

[DGS] Denker, M., Grillenberger, C., Sigmund, K. : Ergodic Theory on Compact Spaces, L.N. Math. 527. Springer 1976.

[HD] Hudson, J.F.P. : Piecewise Linear Topology, W.A. Benjamin Inc. 1969.

[HM] Homma, T. : On the embedding of polyhedra in manifolds, Yokohama Math. J. 10 (1962), 5-10.

[SS] Smale, S. : Differentiable dynamical systems. Bull. Amer. Math. Soc., 73(1967), 747–817

[YN] Yano, K. : A remark on the topological entropy of homeomorphisms. Inv. Math. 59 (1980), 215–220.